**Позиційні системи числення**

У позиційній системі числення один і той же знак може позначати різні числа залежно від місця (позиції), займаного цим знаком в записі числа.

Загальноприйнятою (для ручних обчислень і обчислень за допомогою механічних або електромеханічних рахункових машин) є *десяткова позиційна система*, що бере свій початок від рахунку на пальцях. Вона була винайдена в Індії, запозичена арабами і вже через арабські країни прийшла до Європи.

У цій системі для запису будь-якого числа використовується лише десять|десятеро| знаків (цифр)

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},

множина яких складає алфавіт цієї системи числення.

Довільна скінченна послідовність цифр алфавіту — слово цієї мови — позначає число, являючись умовним, коротким записом складнішого виразу, складеного за певним правилом, що відображає позиційний принцип, при якому значення кожної цифри визначається як нею самою, так і займаним нею місцем (позицією).

Наприклад, слово «3785» позначає число, отримане як результат виконання всіх операцій у виразі

3\*1000 *+ 7\*100 +* 8\*10 + 5 або

3\*103 + 7\*102 + 8\*101 + 5\*100

тобто є коротким записом суми добутків послідовних ступенів числа 10 (основи системи числення) на числа, кожне з яких 10.

Ці числа і позначаються, цифрами, з яких утворюється короткий (умовний) запис числа у вигляді слова «3785» (в результаті опускання знаків + і • і послідовних ступенів числа 10).

Взагалі, якщо довільне число *l* записане в десятковій системі числення . за допомогою слова «*anan-1 ...а1a0»*, де кожна *al*—цифра, тобто 0≤*aі≤9 (*мається на увазі, що аn≠0|*),* то

*l= ап•10n| + аn-1•10n-1 +... + а1•10 + а0.*

У такому докладному розгорненому записі числа наглядно виступає особлива роль числа 10 — основи системи числення (десяткової).

Кожне число розбивається на розряди, які вважаються|лічаться| справа наліво (одиниці, десятки, сотні, тисячі, десятки тисяч і т. д.). При читанні слова «3785» ми не читаємо назви цифр («три, сім, вісім, п'ять»), а читаємо числа, що позначаються|значаться| цими цифрами, з урахуванням|з врахуванням| їх місця в записі числа, опускаючи лише знаки, які маються на увазі («три тисячі сімсот вісімдесят п'ять»).

Одиниця кожного наступного розряду (справа наліво) вдесятеро більше одиниці попереднього (1, 10, 100, 1000, 10000, ...), тобто відношення сусідніх розрядів рівне основі системи.

Природно, можливі позиційні системи числення і з основами відмінними від 10.

Взагалі, якщо довільне число *l* записане в системі числення з|із| основою *р* за допомогою слова «аnаn-1 *... a*1*a0»,* де *al*— цифри з алфавіту цієї мови, що позначають числа від 0 до *р—1* (0≤a≤p-1) і *ап≠0,* то це означає, що

*l=аnрп+аn-1pn-1+... +а1р1 + а0 .*

При *p=10* одержуємо запис числа в десятковій системі.

При *р = 5* отримуємо

*l*= an•5n+an-1•5n-1 *+ ...+a1*•*5+ a0 ,*

тобто запис числа в п'ятирічній системі числення, 0≤а≤4, а алфавіт цієї мови складається з п'яти цифр: {0,1,2,3,4}.

При *p = 8*, очевидно

*l= ап•8n| + аn-1•8n-1 + ... + а1•8 + а0*

запис числа *l* у вісімковій системі числення, в якій 0≤а≤7 і алфавит—| {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

При *р = 2* одержуємо запис числа в двійковій системі числення

*l* = аn•2n + аn-1•2n-1 *+ ... + а1•2 + а0*

у якій *ai* =0 або 1, тобто алфавіт складається всього з двох знаків {0,1}.

Запис числа в системі числення з основою *р* називають також *р-* числом. Так, кажучи, «десяткове», «п'ятіркове», «вісімкове», «двійкове» число, ми маємо на увазі запис числа відповідно в десятковій, п'ятірковій, вісімковій, двійковій системі числення.

Для запису числа в позиційній системі числення, як видно|показно|, потрібно стільки різних знаків (цифр), скільки одиниць в основі системи. Іншими словами, алфавіт позиційної системи числення з основою *р* повинен містити різні знаки, для позначення чисел

*0, 1, 2, .... р—1.*

**Теорема про запис будь- якого цілого числа в системі числення**

***Теорема.***Будь-яке ціле число *l* може бути записано в системі числення з основою *р.*

**Арифметичні операції над системними числами**

Число, записане в певній системі числення, називають *системним числом.* Щоб розрізняти, в якій системі числення записане дане число, ми будемо вказувати основу системи числення, записуючи її (в десятковій системі числення!) справа внизу від числа у вигляді індекса.

Наприклад, 37210 — це запис числа у звичайній десятковій системі числення, а 3728 — у вісімковій системі.

При виконанні арифметичних операцій над числами, записаними в десятковій системі числення, ми користуємося правилами додавання, віднімання і множення чисел «стовпцем» і ділення — «кутом». За цими ж правилами виконують операції й над числами, записаними в будь-якій іншій позиційній системі числення. Грунтуються ці правила на п'яти основних законах додавання і множення цілих чисел: асоціа­тивності й комутативності додавання, асоціативності й комутативності множення, дистрибутивності множення відносно додавання.

Наприклад, при складанні складаються відповідні розряди, починаючи з молодших. Якщо в даному розряді утворюється сума, що вже не уміщається в ньому, то відповідне перевищення переноситься в наступний старший розряд. Таким чином, фактично доводиться використовувати таблицю складання для однозначних чисел.

Розглянемо **додавання** у вісімковій і в двійковій системах складання.

1. Запишемо таблицю складання однозначних чисел і вісімковій системі числення (табл. 1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблиця 1.**   |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | | 5 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | 6 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | 7 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | | Складання двох багатозначних вісімкових чисел виглядає так:    Тут при складанні в кожному розряді ми користувалися табл.1. |

**2**. Таблиця складання однозначних чисел в двійковій системі має вид табл.2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблиця 2.**   |  |  |  | | --- | --- | --- | | +(2) | 0 | 1 | | 0 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 10 | | Додавання двох багатозначних двійкових чисел виглядає так: |

Розглянемо **множення** в двійковій системі числення.

3**.** Таблиця множення в двійковій системі числення має вид табл. 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблиця 3.**   |  |  |  | | --- | --- | --- | | (2) | 0 | 1 | | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | |  |

По суті, оскільки множення на нуль завжди (у будь-якій системі числення) дає нуль, можна вважати, що таблиця множення складається лише з одного рядка 1•1=1.

Але множення на одиницю не міняє|змінює,замінює| числа. Тому множення багатозначних двійкових чисел зводиться лише до зрушення|зсуву| і складання.

Так само просто виконуються в двійковій системі числення і зворотні дії — віднімання і ділення|поділка,розподіл,поділ|:

 

**Переведення цілих чисел з однієї позиційної системи числення в іншу**

У процесі розв'язування задач доводиться переводити цілі числа з однієї позиційної системи числення в іншу. Як же перевести число *а,* записане в системі числення з основою *р,* в систему числення з основою g? Як відомо, записати число *а* в системі числення з основою *g* — це означає зобразити його у вигляді суми

*a* = *akgk + ak-1gk-1* + … *+ a1g + a0.*

Отже, щоб записати число а в системі числення з основою *g,* треба знайти коефіцієнти *а0, а1, а2,* ..., *ak.* Ці коефіцієнти знаходимо так. Поділимо в системі числення з основою *р* число *а* на g, дістанемо *а = b0g* + *а0.* Далі поділимо *b0* на g, дістанемо *b0 = b1g+a1.* Звідси

*a* = *b0g* + *а0* = *(b1g + a1)g + a0 = b1g2 + a1g + a0.*

Потім поділимо *b1* на *g* і т. д. Цей процес продовжуватимемо доти, поки не дістанемо частку, яка дорівнює нулю. Внаслідок цього матимемо:

*a* = *akgk +ak-1gk-1*+ ... + *a1g + a0.*

Оскільки за теоремою число *а* можна подати в такому вигляді єдиним способом, то *а0, а1 , а2,* .... *ak* є цифри числа *а* в системі числення з ос­новою *g.*

Таким чином, *цифрами а0, al ,*..., *ak числа а в системі числення з основою g* *є остачі, що утворюються при послідовному діленні а на g*.

Хід послідовного ділення числа *а* на *g* скорочено записують так:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | g |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a0* | b0 |  | g |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *a1* |  | b1 |  | g |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *a2* |  | b2 | **…** |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | *ak-2* |  | bk-2 |  | g |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | *ak-1* |  | bk-1 |  | g |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *ak* |  | 0 |

Стрілка показує напрям від вищих до нижчих розрядів числа, за­писаного в системі числення з основою *g,* цифри числа *а* у цій системі підкреслено (або взяті в кружечок).

Послідовне ділення числа *а* на *g* провадиться в системі числення з основою *р.* Якщо *g* < *р,* то дільник *g*, а отже, і всі остачі *а0, al ,..., ak* є одноцифрові числа і ми відразу дістаємо потрібні нам цифри числа *а*. Якщо ж *g* > *p,* то в системі числення з основою *р* дільник *g* і, можливо, деякі остачі міститимуть більш як одну цифру. У системі числення з основою *g* ці остачі слід записати новими цифрами, яких у системі числення з основою *р* немає.

Приклад:

Знайдемо запис десяткового числа 1766 в п'ятірковій системі числення. Оскільки 54<1766<55, то найбільший степінь числа 5, яка міститься | в 1766, — 54.

Розділивши дане число на 625, знайдемо у частці 2 і в остачі 516, тобто

1766 = 2•54 + 516.

Важливо відзначити, що частка повинна бути менше 5, інакше 54 не було б найвищим степенем 5, що міститься в числі 1766, а залишок як завжди, менше дільника.

Тепер ми можемо виділити наступну степінь, 53, з залишку:

516 = 4•52+16

(тут знову частка повинна бути менше 5). Отже

1766 = 2•54 + 4•53+16.

Наступна степінь п'яти, 52, не міститься в залишку 16 або міститься | в ньому 0 разів: 16=0•52+16, тобто

1766 = 2•54 +4•53 + 0•52 + 16.

Наступна степінь |п'яти, 51, міститься в залишку 16 три рази:

16 = 3•51+1, і, нарешті, ми одержуємо 1766 = 2•54 +4•53 + 0•52 + 3•51 +1.

Таким чином, десяткове число 1766 запишеться на мові п'ятіркової системи числення у вигляді слова «24031», тобто 1766 = 24031(5).

(Індекс (5) вказує, що це запис числа в п'ятірковій системі числення; при десятковому числі індекс звичайно опускається.)

Розглянутий приклад, хоч і не є доказом можливості представлення будь-якого числа в будь-якій системі числення, містить всі елементи такого доказу, і проведене міркування може бути відповідним чином узагальнено на випадок будь-якого числа і будь-якої системи числення.

Це послідовне ділення записується так:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1766 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1  3  4  01  2 | 353 |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 70 |  | 5 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 14 |  | 5 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 2 |  | 5 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 |

Послідовність залишків від останнього до першого і є словом «24031», що зображає дане десяткове число 1766 в п'ятирічній системі числення.

Дійсно, відповідно до послідовного ділення одержуємо

1766 = 353 • 5 +1;

=(70• 5 + 3) • 5+1;

= ((14• 5 + 0) • 5 + 3) • 5+1;

=(((2• 5+4)• 5 + 0)• 5 + 3)• 5+1;

=2• 54 + 4• 53+0• 52 + 3• 5+1.

Тепер переведемо це ж десяткове число (1766) у вісімкову систему числення.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1766 | 8 |  |  |  |  |  |  |
| 6  41  3  3  6  41  3  3 | 220 |  | 8 |  |  |  |  |
|  |  |  | 27 |  | 8 |  |  |
|  |  |  |  |  | 3 |  | 8 |
|  |  |  |  |  |  |  | 0 |

Отже, 1766 = 3346(8).

При цьому основа 8 дає змогу записати вже в десятковій системі числення, тобто потрібно перевести 3346(8) в десяткову систему числення. 3346(8) = 3• 83+3• 82+ 4• 8 + 6;

= 3• 512 + 3 • 64+32 + 6;

= 1536 + 192 + 32 + 6;

= 1766.

Тепер переведемо це ж число (1766) в двійкову систему числення і одержане|отримане| двійкове число назад в десяткову систему числення.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1766 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 06 | 883 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 16 |  | 441 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 16 |  | 220 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 06 |  | 110 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 06 |  | 55 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | 16 |  | 27 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 16 |  | 13 |  | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 16 |  | 6 |  | 2 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 06 |  | 3 |  | 2 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 16 |  | 1 |  | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 16 |  | 0 |

Отже, 1766=11011100110(2).

Зворотнє переведення двійкового числа в десяткове:

11011100110(2)=1• 210+1• 29+0• 28 + 1• 27 + 1• 26 + 1• 25 +0• 24+0• 23+1• 22+1• 21 +0;

= 210+ 29+ 27 + 26 + 25 + 22+ 21;

= 1024+512+128+64+32+ 4+2= 1766.

**Приклади розв’язування задач**

**1**. Обчислити:

**а)** 2023324 + 222224; **б)** 2201114 — 323234; **в)** 232303014: 1134.

Розв'язання. У четвірковій системі числення цифрами є: {0, 1, 2, 3}. Складемо для них таблиці додавання і множення (табл. 4 і 5).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблиця 4.**   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **+** | 0 | 1 | 2 | 3 | | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | 3 | 10 | | 2 | 2 | 3 | 10 | 11 | | 3 | 3 | 10 | 11 | 12 | | **Таблиця 5.**   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **х** | 0 | 1 | 2 | 3 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 2 | 0 | 2 | 10 | 12 | | 3 | 0 | 3 | 12 | 21 | |
| Тепер виконуємо дії:  **а).** | Перевірка: |
| **б).** | Перевірка: |
| **в).**  (остача) | Перевірка: |

2. Перевести з однієї системи в іншу:

* 1. 13810→х4
  2. 134010→х15
  3. 100324→х3
  4. 20324→х10

Розв'язання.

|  |  |
| --- | --- |
| **а).** 13810→х4    Оскільки 4<10, то всі остачі є цифрами в новій системі числення.  Отже, 13810=20224. | **б).** 134010→х15  У 15-ковій системі числення число 14 є цифрою і позначається (14) або .    Отже, 134010=5(14)515 |

**в).** 100324→х3

Число 3 в четвірковій системі числення записують так само. Тоді



Отже, 100324→1010003

Перевірка: Число 4 у трійковій системі числення записують як 113. використовуючи таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у трійковій системі числення (табл. 6, 7) матимемо

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблиця 6.**   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **+** | 0 | 1 | 2 | | 0 | 0 | 1 | 2 | | 1 | 1 | 2 | 10 | | 2 | 2 | 10 | 11 | | **Таблиця 7.**   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **х** | 0 | 1 | 2 | | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 2 | | 2 | 0 | 2 | 11 | |



Отже, 1010003=100(103)24=100324, оскільки 103=34.

**г).** 20324→х10 .

*І спосіб*.

|  |  |
| --- | --- |
| Число 10 в четвірковій системі числення записують так:    1010=224. | Тоді    Отже, 20324=1(104)210=14210 . |

*ІІ спосіб*. 20324=2·43+3·41+2·40=2·64+0+12+2=14210.

Як бачимо, результати однакові.

1. Перевести з однієї системи в іншу:
   1. 11101110001112→х8;
   2. 36734018→х2.

Розв'язання.

Застосуємо досить простий спосіб переведення з двійкової системи числення у вісімкову і навпаки.

Складемо таблицю виразів цифр вісімкової системи числення в двійковій системі:

08=0002

18=0012

28=0102

38=0112 **(1)**

48=1002

58=1012

68=1102

78=1112

Щоб перевести число з вісімкової системи числення в двійкову, треба кожну цифру цього числа замінити двійковою тріадою за формулами (1). В свою чергу, щоб перевести число з двійкової системи числення в вісімкову, треба розбити це число справа наліво на грані, кожна з яких містить по три цифри (якщо треба, то останню грань доповнюють до тріади нулями). Потім кожну з двійко­вих тріад замінюють вісімковою цифрою за формулами (І).

1. 11101110001112→х8; (001)(110)(111)(000)(111)2=167078 .
2. 36734018=0111101110111000000012=111101110111000000012.